式展開と図で理解する正規分布

2018.6.3

正規分布の式

$N(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ・・・①式　を導出します。

$f(x)=e^{-x^2}$ ・・・ ②式　からスタートすることとします。

「これが正規分布の式です。」で済ませてしまってもいいのだと思いますが、②式を任意のμ(平均値)とσ^2(分散)に対応し、かつ、確率密度関数（積分結果を 1）にするという２つの要請を満たすように調整した式が①式ということになります。

実際に②式の x に具体的な数値を代入して得た値を xy 平面上にプロットしてみると、上に凸の釣鐘型の曲線になることが確認できます。

１　標準正規分布の式の導出

（１）②式の積分結果を１にする（確率密度関数にする)。

②式を積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$ ・・・ガウス積分（今回は既知として話を進めます。）

両辺を$\sqrt{\pi}$で割ると、

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=1$$

よって新たな関数は、

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$ ・・・③式

ここで、③式の分散を求めてみると、

$$V[x]=E[x^2]-\left\{\underbrace{E[x]}_{0}\right\}^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx-0^2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\underline{xe^{-x^2}}dx$$ ・・・(ア)式

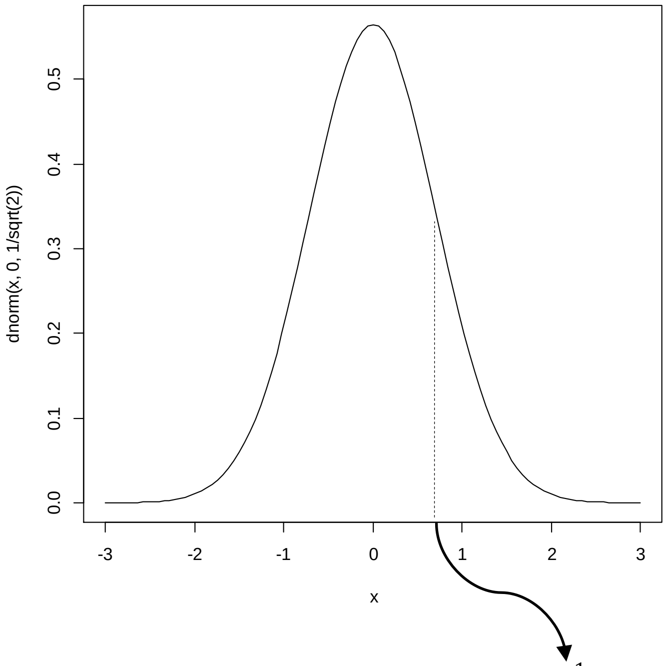
なお、$\underline{xe^{-x^2}}$の積分$\int xe^{-x^2}dx$は、$t=-x^2$と置換して、$\frac{dt}{dx}=-2x$　$\therefore dx=-\frac{1}{2x}dt$ より、

$$=\int xe^t\left(-\frac{1}{2x}\right)dt=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$ (積分定数Ｃは省略)なので、

（ア）式を部分積分（※）すると、

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[x\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)dx\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[-\frac{x}{2e^{x^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx}_{\sqrt{\pi}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{\infty}{\underbrace{2e^{\infty^2}}_{0}}-\left(-\frac{-\infty}{\underbrace{2e^{(-\infty)^2}}_{0}}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)=\frac{1}{2}$$



〔図１〕③式のグラフ・・・標準偏差は$\frac{1}{\sqrt{2}}$　(分散は$\frac{1}{2}$)

（２）③式の分散$\frac{1}{2}\left(\text{標準偏差は}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$を 1(標準偏差も 1)に変換する。

そのためには、〔図１〕のグラフの変曲点における正の x の値（標準偏差）$\frac{1}{\sqrt{2}}$を１に変換してやればよいので、x=$\frac{1}{\sqrt{2}}$を$x' = 1$に変換する。

$x : x' = \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$ とおくと、$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'$なので、これを③式に代入する。

$$f(x') = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x'^2}$$

x'を x と置換すると、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ・・・④式$$

（３）④式の積分結果を１にする。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

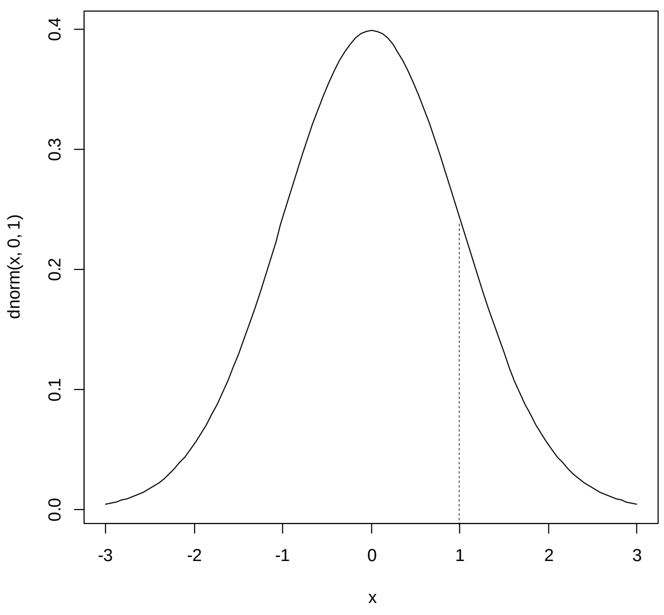
$y=\frac{1}{\sqrt{2}}x$ と置換すると、$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より、$dx=\sqrt{2}dy$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\cdot\sqrt{2}dy=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy}_{\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\sqrt{2}$$

この積分結果を１にするために両辺を$\sqrt{2}$で割ると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1$$ より

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$ ・・・⑤式（標準正規分布 N(0,1)）



〔図２〕⑤式のグラフ・・・標準偏差は 1(分散も 1)

2　一般の正規分布の式の導出

　一般の正規分布の式の導出は、標準正規分布の式の導出とパターンは同じですので、これまでの内容が理解できれば容易に理解できると思います。

（１）⑤式の分散 1(標準偏差も 1)をσ^2(標準偏差はσ)にする。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\quad ・・・⑤式(標準正規分布)$$

$x:x'=1:\sigma$ とおくと、$x=\dfrac{x'}{\sigma}$ なので、これを⑤式に代入すると、

$$f(x')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x'}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

x'を x と置換すると、

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\quad ・・・⑥式$$

（２）⑥式の積分結果を 1 にする。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}dx$$

$y=\dfrac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ と置換すると、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}$　$\therefore dx=\sqrt{2}\sigma dy$ より、

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\cdot\sqrt{2}\sigma dy=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy}_{\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=\sigma$$

この積分結果を 1 にするために両辺をσで割ると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}dx=1 \text{ より、}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\quad ・・・⑦式$$

⑦式の平均値を 0 からμにするために、xを$x-\mu$に置換すると、

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad ・・・①式$$

となり、ようやく一般の正規分布の式 $N(\mu,\sigma^2)$にたどり着きました。

　平均値 0 をμにしても、グラフは x 軸に沿って平行移動するだけで形状は変わらず積分結果は 1 のままのため、これ以上の式変形は不要です。

（※）部分積分

部分積分は、「積の微分」の裏返しです。

積の微分公式は、　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$　ですが、部分積分の公式は、積の微分公式の順番を入れ替えて両辺を積分すればよいだけなので、無理に暗記する必要はないと思います（私も覚えていないため、いつも積の微分公式からスタートしています)。

ということで、

○不定積分の部分積分の公式は、

$$\int \underbrace{f(x)}_{(①)}\ \underbrace{g'(x)}_{(②)}dx = \underbrace{f(x)}_{(①)}\underbrace{g(x)}_{(②の積分)} - \int \underbrace{f'(x)}_{(①の微分)}\ \underbrace{g(x)}_{(②の積分)}dx$$

○定積分の部分積分の公式は、

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{(①)}\ \underbrace{g'(x)}_{(②)}dx = \Big[\underbrace{f(x)}_{(①)}\underbrace{g(x)}_{(②の積分)}\Big]_a^b - \int_a^b \underbrace{f'(x)}_{(①の微分)}\ \underbrace{g(x)}_{(②の積分)}dx$$

です。

例えば、

$$\int \underbrace{x}_{(①)}\ \underbrace{e^x}_{(②)}dx = \underbrace{x}_{(①)}\ \underbrace{e^x}_{(②の積分)} - \int \underbrace{1}_{(①の微分)} \cdot \underbrace{e^x}_{(②の積分)}dx = xe^x - e^x + C(積分定数)$$

です。

微分して簡単になる方を微分する項に選ぶのがコツで、この問題の場合は、x を微分すると定数 1 になって消えてしまうので、こちらを①にすると好都合です。

〔参考文献〕

一石賢 著『道具としての統計解析』2004 年（日本実業出版社）